ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen final **20/02/2024**

Apellido y nombre:

Corrigió: **Revisó:**

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas

Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1. *a*) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Demuestre que si f es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0) .

b) Determine si la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$ es diferenciable en el origen.

T2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

a) El máximo de $f(x,y) = x - y$ en $D : \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\right\}$ vale 2 y se alcanza en el punto $\mathbf{X}_0 = (1, -1)$.

b) El área de la región $D : \begin{cases} x^2 + 3y^2 \leq 3, \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$, utilizando el cambio de variable $\begin{cases} x = \sqrt{3} r \cos(\theta), \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$, está dada por la integral $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4} \sqrt{3} r \, d\theta\right] dr$.

P1. Halle una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^2$, tal que el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (xg'(y),\ g'(y),\ g(y) - 2yz)$ a través de toda superficie esférica cerrada sea nulo y se verifique $\vec{f}(1,0,0) = (-2,-2,1)$.

P2. Sean $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 , $\vec{f}(x,y) = (x^2 - 3y,\ h(y))$ y C la curva formada por la unión de dos segmentos, uno de extremos $(0,0)$ y $(2,2)$ y el otro de extremos $(2,2)$ y $(4,0)$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C orientada de $(4,0)$ a $(0,0)$.

P3. Calcule la masa del cuerpo $V = \Big\{(x,y,z) : x + z \leq 4,\ x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\Big\}$ sabiendo que en cada punto de V la función densidad es proporcional a la distancia del punto al plano xy .

P4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (x^3 + 2y,\ y^6 - x - z,\ z^{12} + y)$ a lo largo del borde de la porción del **plano tangente a** $S : x^2 y + y^3 + z^2 + z = 4$ en $\mathbf{P} = (1,1,1)$, que verifica la condición $x^2 + y^2 \leq 2y$. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo.

AM 2 UTN | Final | HOJA N° 1 | FECHA 20-2-24

$\boxed{T_1}$: a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Demuestre que si f es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0)

f diferenciable en $\bar{A} \Rightarrow \exists$ un entorno de A: $\varepsilon \bar{A}$ en el cual:

$$f(\bar{A}+\bar{r}) - f(\bar{A}) = \nabla f(\bar{A})\,\bar{r} + \varepsilon(\bar{r})\,\|\bar{r}\|$$

$$y \lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\bar{A}+\bar{r}) = \lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \left(f(\bar{A}) + \nabla f(\bar{A})\bar{r} + \varepsilon(\vec{r})\,\|\bar{r}\| \right)$$

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\bar{A}+\bar{r}) = \underbrace{\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\bar{A})}_{f(\bar{A})} + \underbrace{\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\bar{A})\,\vec{r}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{\bar{r}\to\vec{0}} \varepsilon(\bar{r})\,\|\vec{r}\|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\bar{A}+\bar{r}) = f(\bar{A})$$

$\longrightarrow$ es la definición de continuidad $\exists \lim$, $\exists f(A)$ y $\lim = f(A)$

b) Determine si la función def por $f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ es diferenciable en el origen

Hallo $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(0,0)$ y analizo la función $\quad (\vec{r} = (a,b) \text{ con } a^2+b^2=1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+\vec{r}h) - f(0,0)^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \overset{\text{si } y\neq 0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{ha}{hb}$$

si $a=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(0,0) = 0$

si $a \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim$

$\rightarrow$ si $b=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(0,0) = 0$

f no es continua en $(0,0)$

$\boxed{f \text{ no derivable en toda dirección en } (0,0) \Rightarrow f \text{ no es dif en } (0,0)}$

$\boxed{\text{T2}}$ Determine si las sig. proposiciones son V o F.

a) El máximo de $f(x,y) = x-y$ en $D: \{(x,y) / \underbrace{x^2+y^2 \leq 2}_{\text{círculo centro } \bar{0} \text{ radio } \sqrt{2}}\}$ vale 2 y se alcanza en $x_0 = (1,-1)$

Interior: hallo (x,y) / $\nabla f_{(x,y)} = \bar{0}$

$$\begin{cases} f'_x = 1 \\ f'_y = -1 \end{cases} \neq (0,0) \Rightarrow \nexists \text{ PC en el interior}$$

Borde: $x^2+y^2=2 \rightarrow C: \bar{\gamma}_{(t)} = (\underbrace{\sqrt{2}\cos(t)}_{x}, \underbrace{\sqrt{2}\,\text{sen}(t)}_{y})$

$$h_{(t)} = f_{(\bar{\gamma}_{(t)})} = \sqrt{2}\cos(t) - \sqrt{2}\,\text{sen}\, t$$

$$h'_{(t)} = 0 = -\sqrt{2}\,\text{sen}(t) - \sqrt{2}\cos(t) \longrightarrow \sqrt{2}\,\text{sen}(t) = -\sqrt{2}\cos(t)$$

donde $\cos(t) = 0 \Rightarrow \text{sen}(t) \neq 0 \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}\,\text{sen}(t)}{\sqrt{2}\cos(t)} = -1$

$$tg(t) = -1 \longrightarrow t = 3/4\,\pi$$
$$t = 7/4\,\pi$$

$PC_1 = \bar{\gamma}(3/4\,\pi) = (-1, 1)$

$PC_2 = \bar{\gamma}(\frac{7}{4}\pi) = (1,-1)$

$f(PC_1) = -1-1 = -2$

$f(PC_2) = 1-(-1) = 2$ ✓

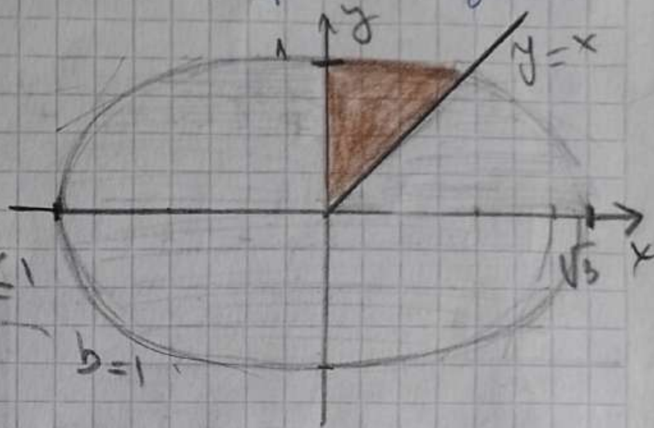
$\boxed{\text{x T. Weierstrass} \Rightarrow \text{máx } f(1,-1) = 2}$

V

AM2 UTN	Final	HOJA N° 2 FECHA 20-2-24

(1) b) el área de la región $D: \begin{cases} x^2+3y^2 \leq 3 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$, utilizando el cambio de variable $\begin{cases} x = \sqrt{3}\, r\cos(t) \\ y = r\, \text{sen}(t) \end{cases}$ está dada por la integral:

$$A = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4} \sqrt{3}\, r \, dt \right] dr$$



$$D: \begin{cases} x^2+3y^2 \leq 3 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1$$

$\rightarrow a = \sqrt{3} \quad b = 1$

$$y = x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r\,\text{sen}(t)}{\sqrt{3}\, r\cos(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}} tg(\alpha) = 1$$

$tg(\alpha) = \sqrt{3}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}\pi}$

$$Jac. = a.b.r = \sqrt{3}\, r$$

$$\boxed{A = \int_0^1 \left[\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{3}\, r \, dt \right] dr}$$

F

NOTA

$\boxed{P1}$ Halle una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^2$, tal que el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z) = (x\, g'(y), g'(y), g(y) - 2yz)$ a través de toda la superficie esférica cerrada sea nulo y se verifique que $\bar{f}(1,0,0) = (-2,-2,1)$

- S es la esfera → sup que encierra una región de $\mathbb{R}^3$: W
  $S = \partial W$ cerrada y orientada al exterior
- f tiene componentes polinómicas y func. $C^2 \Rightarrow f \in C^1$

Se cumplen las hip. de Gauss $\Rightarrow \oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{f})\, d\text{vol}$

si $\operatorname{div} = 0 \Rightarrow \oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = 0$ $\qquad \bar{f} = (P,Q,R)$

$\operatorname{div} \bar{f} = P'_x + Q'_y + R'_z = g'(y) + g''(y) - 2y = 0$

hallo g / $g''(y) + g'(y) = 2y$

Sol. hom: $g'' + g' = 0$
$r^2 + r = 0$ → $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ $\Big\}$ $g_H = Ae^{-y} + Be^{0}$ $\quad A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{g_{H}(t) = Ae^{-t} + B}$

Sol. part: $g_P = Ct^2 + Dt \to g'_P = 2Ct + D \quad g''_P = 2C$

$2C + 2Ct + D = 2t$

$\underbrace{2C}_{2}t + (\underbrace{2C+D}_{0}) = 2t$ $\qquad \boxed{g_P = t^2 - 2t}$

$\to C = 1 \quad \to 2 \cdot 1 + D = 0 \to D = -2$

$g = g_H + g_P \to \boxed{g(t) = Ae^{-t} + B + t^2 - 2t}$

$\hookrightarrow \boxed{g'(t) = -Ae^{-t} + 2t - 2}$

$\bar{f}(1,0,0) = (1\underbrace{g'(0)}_{-2}, \underbrace{g'(0)}_{-2}, \underbrace{g(0)}_{1})$

$g'(0) = -2 = -Ae^{-0} + 2 \cdot 0 - 2 \to \boxed{A = 0}$ $\qquad g(t) = 2e^{-t} + 1 + t^2 - 2$

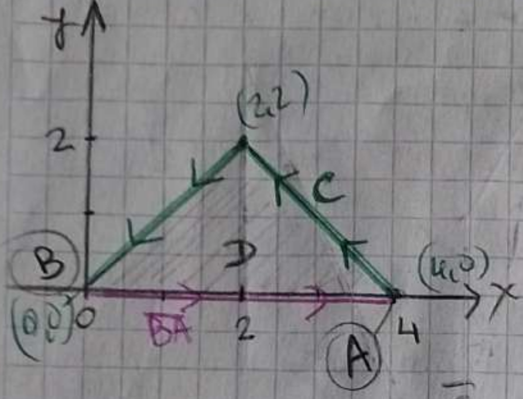
$g(0) = 1 = \underset{0}{A}e^{-0} + B + 0^2 - \cancel{2 \cdot 0} = \boxed{B = 1}$

$$\boxed{g(y) = 1 + y^2 - 2y}$$

AM2 UTN	Final	HOJA N° 3 FECHA 20-2-24

P2 Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1. $\bar{F}(x,y) = (x^2-3y, h(y))$ y C la curva ~~formada~~ formada por la unión de dos segmentos, uno de extremo $(0,0)$ y $(2,2)$ y el otro de extremos $(2,2)$ y $(4,0)$

Calcule la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de C orientada de $(4,0)$ a $(0,0)$



$A = (4,0)$ $\quad C_T = C \cup \overline{BA}$

$B = (0,0)$ $\quad$ I $\oint_{C_T^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \int_C \bar{F}\,d\bar{l} + \int_{\overline{BA}} \bar{F}\,d\bar{l}$

C_T es curva cerrada frontera de D
↳ suave a trozos

D es una región compacta de $\mathbb{R}^2$

$\bar{F} = (P,Q)$, P es polinómica y $Q \in C^1$ (enunciado)

$\bar{F} \in C^1$

Se cumplen las hip. t. Green $\therefore$ $\oint_{C_T^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dxdy =$

$= \iint_D 0-(-3)\,dxdy = 3 \boxed{\iint_D dxdy} = 12$

Área de D $= \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$

$$\boxed{\oint_{C_T^+} \bar{F}\,d\bar{l} = 12}$$

$\overline{BA}$: $\bar{\gamma}(t) = t(A-B)+B \to t \in [0,1] \to \bar{\gamma}(0) = B$

$\bar{\gamma}(1) = A$

$\bar{\gamma}(t) = t[(4,0)-(0,0)] + (0,0)$

$\overline{BA}: \bar{\gamma}(t) = (4t, 0) \quad t \in [0,1] \qquad \bar{\gamma}'(t) = (4,0)$

$\int_{\overline{BA}} \bar{F}\,d\bar{l} = \int_0^1 \bar{F}(\bar{\gamma}(t))\,\bar{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^1 (\underbrace{(4t)^2 - 3\times 0}_{x^2-3y}, h(0))(4,0)\,dt =$

$= \int_0^1 64t^2\,dt = \boxed{\frac{64}{3} = \int_{\overline{BA}} \bar{F}\,d\bar{l}}$

I $\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \oint_{C_T^+} \bar{F}\,d\bar{l} - \int_{\overline{BA}} \bar{F}\,d\bar{l} = 12 - \frac{64}{3} = -\frac{28}{3}$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = -\frac{28}{3}}$$

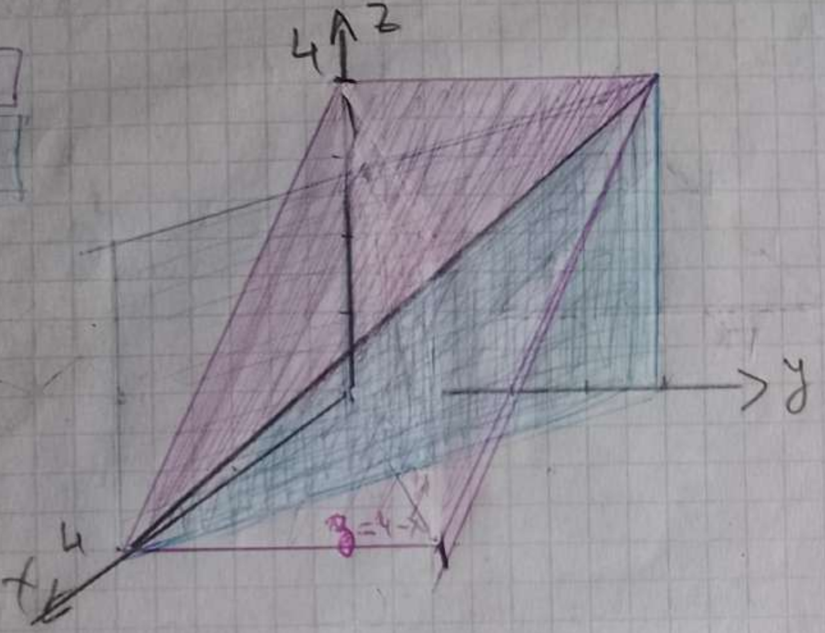
NOTA

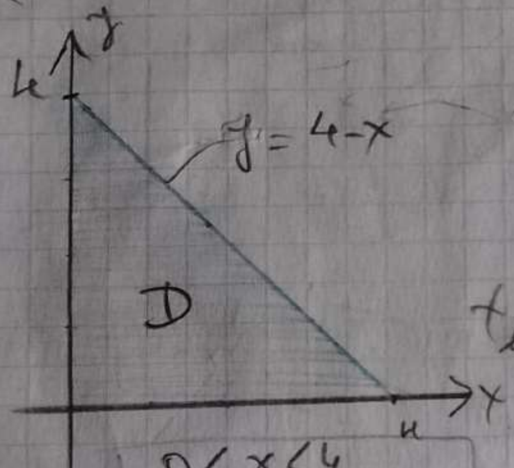
$\boxed{P3}$ Calcule la masa del cuerpo $V = \{(x,y,z) : x+z \leq 4,\ x+y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

Sabiendo que en cada punto de V la función de densidad es proporcional a la distancia del punto al plano xy

densidad: $\delta_{(x,y,z)} = |z| \qquad z \geq 0 \Rightarrow \delta_{(x,y,z)} = z\,k$

$$\begin{cases} x+z \leq 4 \rightarrow \boxed{z \leq 4-x} \\ x+y \leq 4 \rightarrow \boxed{y \leq 4-x} \\ 1^{\circ} \text{ octante} \end{cases}$$





$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4-x \\ 0 \leq z \leq 4-x \end{array}}$$

$$\text{Masa}_V = \iiint_V \delta_{(x,y,z)}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x} k z \, dz\, dy\, dx =$$

$$= k \int_0^4 \int_0^{4-x} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{4-x} dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \int_0^{4-x} (4-x)^2\, dy\, dx =$$

$$= k\frac{1}{2} \int_0^4 (4-x)^2\, y \Big|_0^{4-x} dx = \frac{1}{2} k \int_0^4 (4-x)^2 (4-x)\, dx =$$

$$= k\frac{1}{2} \int_0^4 (4-x)^3\, dx = 32\,k$$

$$\boxed{\text{Masa}_V = 32k}$$

AM 2 UTN | Final | Hoja N° 4 | Fecha 20-2-24

$\boxed{P4}$ Calcule la circulación de $\bar{F}_{(x,y,z)} = (\overset{P}{x^3+2y}, \overset{Q}{y^6-x-z}, \overset{R}{z^{12}+y})$ a lo largo del borde de la porción del plano tangente a $S: x^2y+y^3+z^2+z=4$ en $P=(1,1,1)$, que verifica la condición $x^2+y^2 \leq 2y$. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo

C es el borde de una superficie
C es cerrada, frontera de S
S es una sup. orientable
$\bar{F} = (P,Q,R)$ con P, Q y R funciones polinómicas
$\bar{F} \in C^\infty \Rightarrow \bar{F} \in C^1$

Se cumplen las hip. del T. Stokes, entonces

$$\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}\bar{F} \cdot d\bar{S}$$

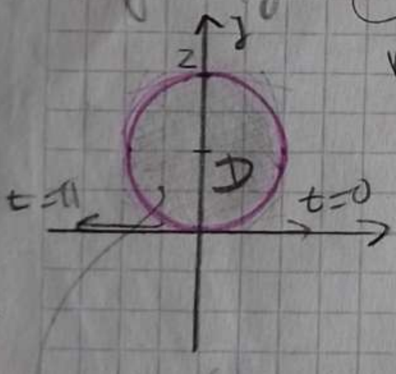
$d\bar{S} = \check{n}\, dS$

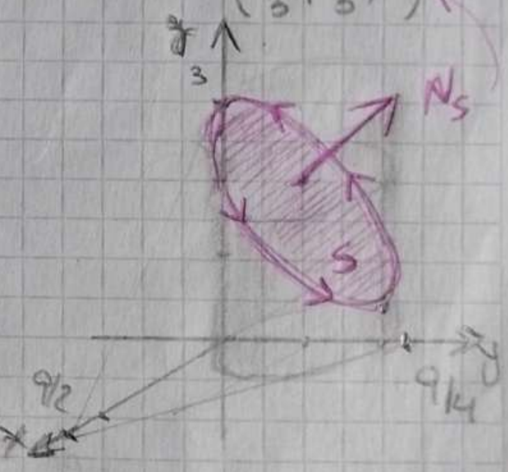
La Normal a S es $N = (2xy, x^2+3y^2, 2z+1) \rightarrow \underbrace{N_{(1,1,1)} = (2,4,3)}_{n = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)}$

$N(x,y,z) = N\underset{(1,1,1)}{P} \Rightarrow \boxed{2x+4y+3z=9}$

Proy en xy: $\underbrace{x^2+y^2 \leq 2y}_{r^2 \leq 2r\,\text{sen}(t)} \rightarrow \begin{array}{l} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{array}$

$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2\,\text{sen}(t) \\ 0 \leq t \leq \pi \end{array}}$





en $x=y=0 \rightarrow z=3$
$x=z=0 \rightarrow y=9/4$
$y=z=0 \rightarrow x=9/2$

$$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1-(-1), 0-0, -1-2) = \boxed{(2,0,-3) = \text{rot}}$$

$$\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S (2,0,-3) \underbrace{\left(2/3, 4/3, 1\right)}_{\|m\|} . dS = \iint_D 4/3 - 3\, dxdy = \frac{-5}{3} \boxed{\iint_D dx\,dy}$$

⟹ Área de D

$A_D = \pi . r^2 = \pi . 1^2 = \pi \longrightarrow \boxed{\oint_{C+} \bar{F}\, d\bar{l} = -\frac{5}{3}\pi}$

NOTA